

UV Traitement du signal

Cours 9

Filtrage numérique

ASI 3

Contenu du cours

□ Caractérisations des filtres numériques

- ◆ Réponse impulsionnelle
- ◆ Equation aux différences
- ◆ Fonction de transfert en z

□ Classification des filtres numériques

□ Etude des filtres RIF

- ◆ Caractéristiques et propriétés
- ◆ Synthèse des filtres RIF
 - Méthode de la fenêtre
 - Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

□ Synthèse des filtres RII

- ◆ Méthode de l'invariance impulsionnelle
- ◆ Transformation bilinéaire

Caractérisations des filtres numériques

□ Réponse impulsionnelle $h(n)$



$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

◆ Causalité du filtre

Le filtre est causal ssi la réponse impulsionnelle est causale $h(n) = 0 \quad \forall n < 0$

◆ Stabilité

Le filtre est stable ssi la réponse impulsionnelle est absolument sommable $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

◆ Longueur de la réponse impulsionnelle

- Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

$$h(n) \neq 0 \quad \forall n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \quad N : \text{longueur de la réponse impulsionnelle}$$

- Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

$$h(n) \neq 0 \quad \forall n > n_0$$

Caractérisations d'un filtre numérique

□ Equation aux différences (relation entrée-sortie)

$$\boxed{\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)} \quad \text{avec } a_0=1$$

$$\blacklozenge N=0 \longrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

- Filtre à *réponse non réursive*
- La réponse impulsionnelle est finie
- Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

$$\blacklozenge N \geq 1 \longrightarrow y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

- *Filtre à réponse réursive*
- Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

Caractérisations d'un filtre numérique

□ Fonction de transfert en z

$$\begin{array}{ccc} y(n) = h(n) * x(n) & & \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \\ \downarrow \quad \uparrow & & \downarrow \quad \uparrow \\ Y(z) = X(z).H(z) & \text{ou} & H(z) = \frac{b_M z^{-M} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0} \end{array}$$

◆ Stabilité et causalité du filtre linéaire

Un filtre numérique linéaire et causal est stable ssi tous les pôles $\lambda_i \in$ de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité

◆ RDC de $H(z)$

En considérant un filtre causal, la RDC est donnée par $RDC = \left\{ z \in \square / |z| > \max_i (|\lambda_i|) \right\}$

◆ Filtre à minimum de phase

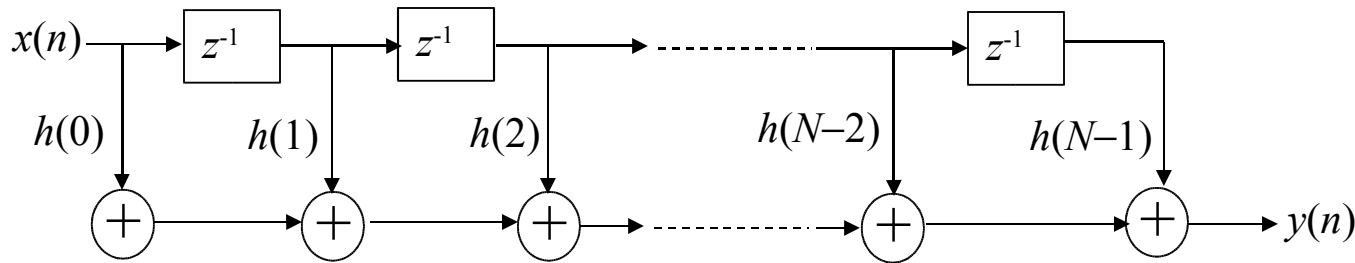
Si tous les zéros $z_i \in$ de $H(z)$, fonction de transfert d'un filtre linéaire, causal et stable sont à l'intérieur du cercle unité alors le **filtre** est dit **à minimum de phase**

Classification des filtres numériques

❑ Réalisation des filtres

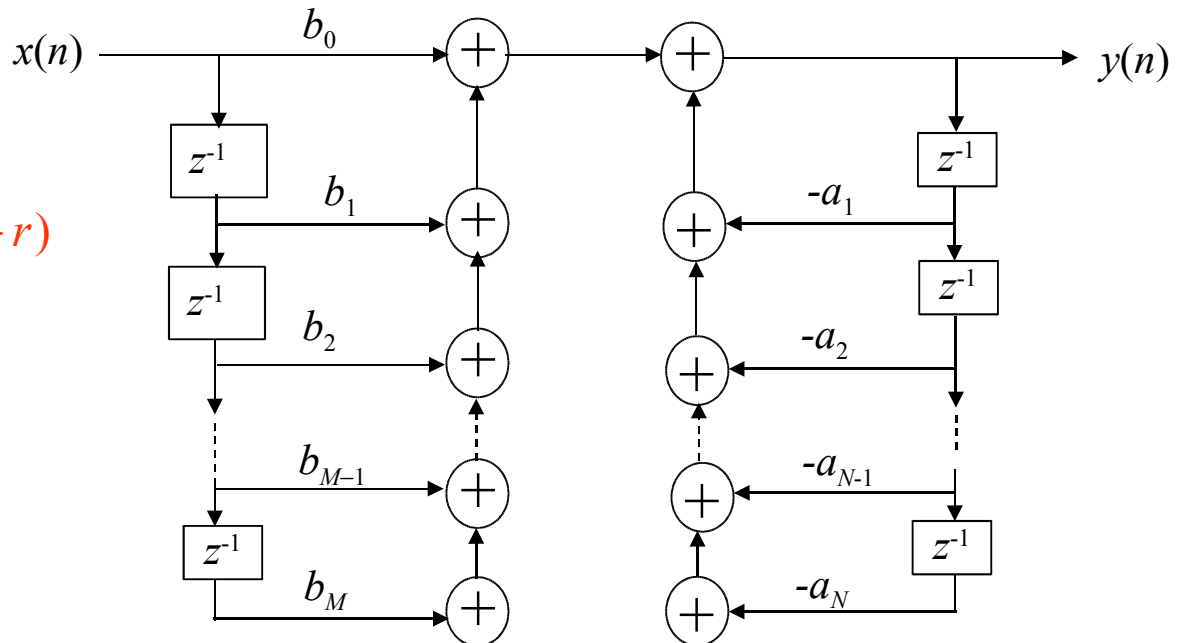
◆ Réalisation non-réursive ou transverse

Filtre causal à réponse impulsionnelle finie de longueur N :
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h(k)$$



◆ Réalisation récursive

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



Classification des filtres numériques

❏ Réalisation des filtres

◆ Réalisation par la TFD



Calcul de la sortie $y(n)$ à l'aide de la TFD (la TFD est mise en œuvre par l'algorithme TFR)

1. $X(k) = TFD\{x(n)\}$

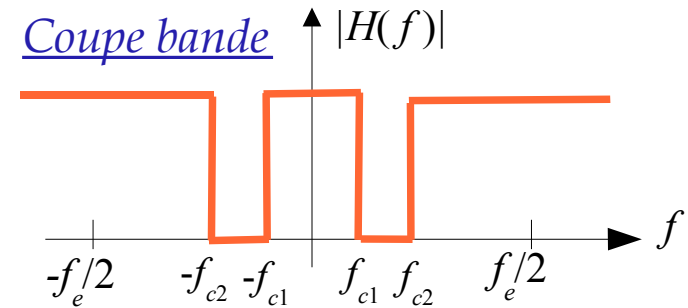
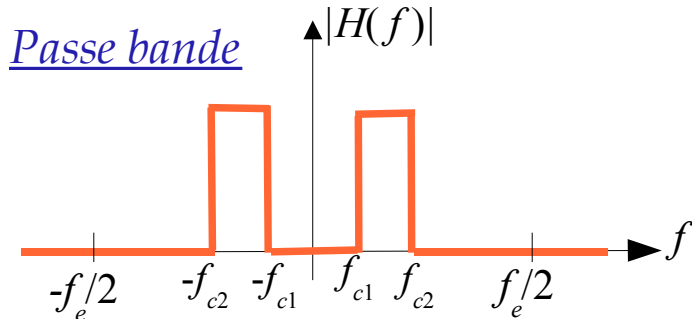
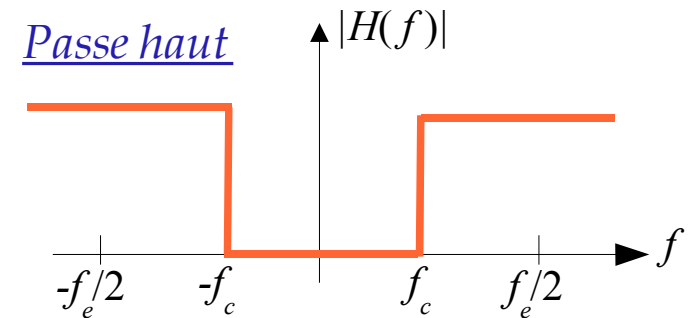
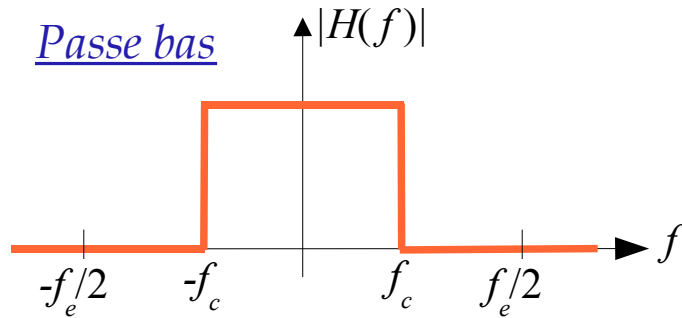
1. $Y(k) = H(k).X(k)$

1. $y(n) = TFD^{-1}\{Y(k)\}$

La réalisation du filtre par la TFD (algorithme TFR) est plus avantageuse que la réalisation non-réursive en termes de coût de calcul pour une durée de la réponse impulsionnelle $h(n)$ supérieure à 30 coefficients

Classification des filtres numériques idéaux

□ Réponse fréquentielle



Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

❏ Caractéristiques

▪ Equation aux différences

La sortie est une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées

$$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

▪ Réponse impulsionnelle

$$h(n) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r \delta(n-r) \quad \text{ou} \quad h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

N : longueur de la réponse impulsionnelle

▪ Fonction de transfert en z

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$$

▪ Réponse fréquentielle

$$H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-j2\pi f n}$$

Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

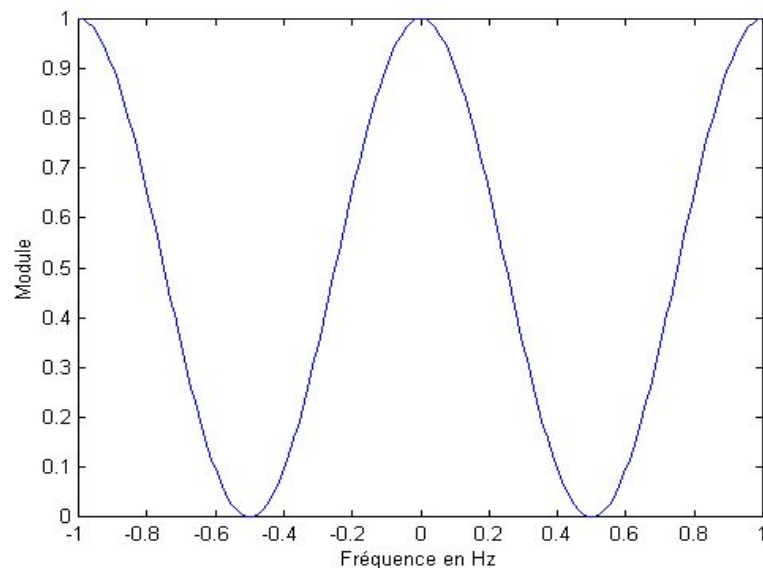
Exemple

On a la relation entrée-sortie suivante : $y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2))$

■ Réponse impulsionnelle

$$h(n) = \frac{1}{4}(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2))$$

• Module $|H(f)| = \cos^2(\pi f)$



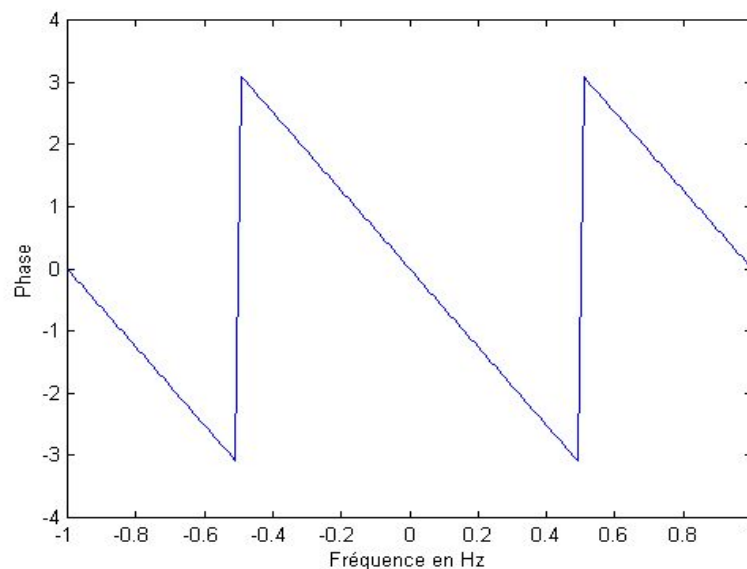
Filtre passe-bas

■ Réponse fréquentielle

$$H(f) = e^{-j2\pi f} \cos^2(\pi f)$$

• Phase $\arg(H(f)) = -2\pi f$

Phase linéaire par rapport à f



Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

□ Propriétés

◆ Stabilité inconditionnelle

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$$

Les filtres à réponse impulsionnelle finie sont toujours stables car ils n'admettent pas de pôles.

◆ Approximation

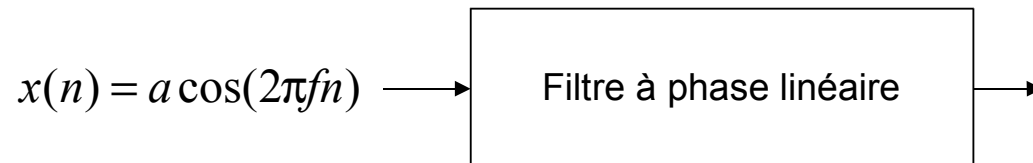
Toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre RIF

◆ Phase linéaire

Les filtres FIR peuvent générer des filtres à phase linéaire

Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme

$$H(f) = R(f)e^{-j\varphi(f)} \quad \varphi(f) = \varphi_0 + 2\pi f\tau \quad \tau : \text{constante}$$



Synthèse de filtre RIF

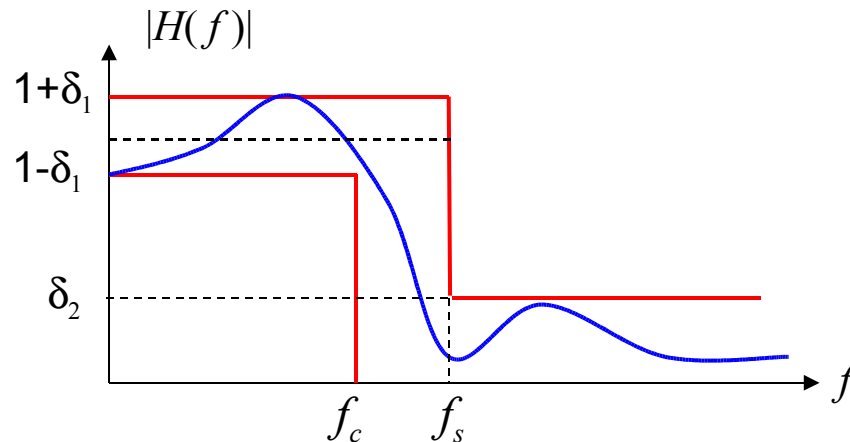
□ Méthode de la fenêtre

■ Problématique

A partir du gabarit fréquentiel, effectuer la synthèse d'un **filtre RIF réalisable** (causalité) à phase linéaire → contrainte de symétrie des coefficients

$$h(n) = h(N-1-n) \quad \text{avec} \quad 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

■ Gabarit réel



Filtre caractérisé par :

- la bande passante BP
- la bande atténuée (ou coupée)
- la largeur ΔF de la zone de transition
- l'amplitude des oscillations en bande passante δ_1
- l'amplitude des ondulations en bande atténuée δ_2

$\Delta F = f_s - f_c$: largeur de la bande de transition

Synthèse de filtre RIF

❏ Méthode de la fenêtre : méthodologie

- A partir du gabarit réel du filtre, déterminer la longueur N de la RIF
- A partir du gabarit idéal du filtre, déterminer les coefficients du filtre en limitant le calcul à N valeurs réparties symétriquement autour de $n=0$

➤ Calcul de la TFTD inverse du filtre idéal

■ N impair

$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{j2\pi f n} df$$

■ N pair

$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) \cdot e^{-j\pi f} \cdot e^{j2\pi f n} df$$

➤ Limitation de la réponse impulsionnelle à N échantillons (troncature)

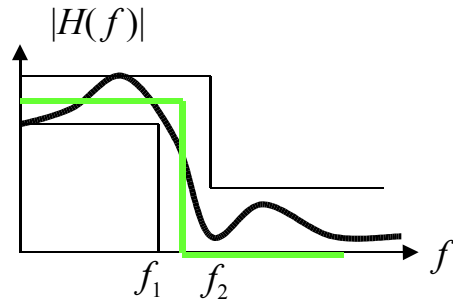
Pondération de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ par une suite discrète $w(n)$ appelée fenêtre de pondération

$$h_N(n) = h(n) \cdot w(n) \quad \text{■ Exemple : fenêtre rectangulaire}$$

- Décalage de la réponse impulsionnelle $h_N(n)$ pour avoir une solution causale

Synthèse de filtre RIF : exemple

❏ Méthode de la fenêtre



➤ Calcul de la réponse impulsionnelle idéale (cas N impair)

$$h(n) = \int_{-Fe/2}^{Fe/2} H(f) e^{j2\pi fn} df \longrightarrow h(n) = \int_{-B/2}^{B/2} H(f) e^{j2\pi fn} df$$

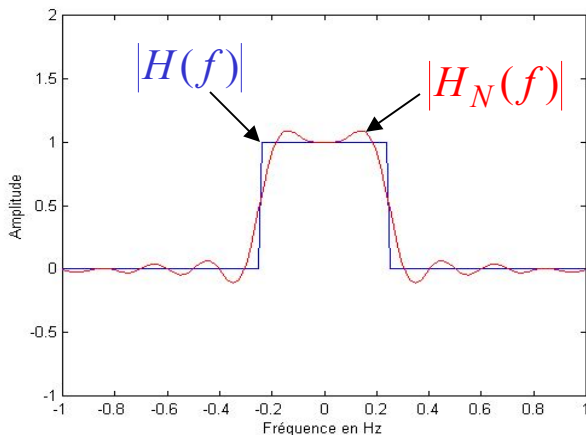
$$h(n) = \frac{\sin(\pi Bn)}{\pi n} \quad \text{avec} \quad B = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

➤ Limitation du nombre d'échantillons à N

$$h_N(n) = h(n) \cdot w(n) \longrightarrow H_N(f) = H(f) * W(f)$$

Fenêtre rectangulaire

$$w(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \longrightarrow W(f) = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$



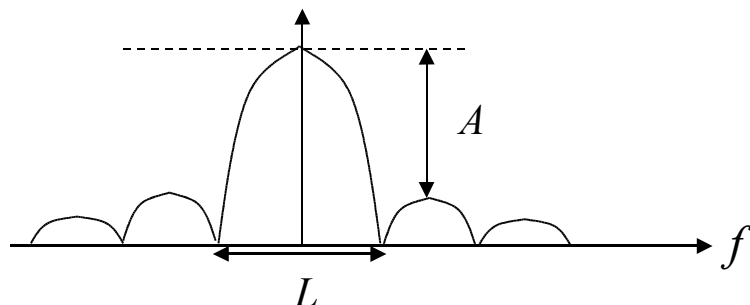
• La pondération temporelle introduit des ondulations et limite la raideur de coupure du filtre. Un compromis est à faire entre la raideur et l'amplitudes des ondulations.

• Cette méthode donne des ondulations de même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Synthèse de filtre RIF : méthode de fenêtré

□ Choix de la fenêtré de pondération

■ Allure de $W(f)$



L : largeur du lobe principal

A : amplitude des lobes secondaires

Fenêtré idéale : L Faible, A_{dB} Faible

■ Qq relations

Relation entre la longueur N de la fenêtré et la bande de transition ΔF du filtre obtenu

$$N \cdot \Delta F = c^{ste}$$

	A_{dB}	L	ΔF	δ_2 (dB)
Rectangulaire	-13	$4/N$	$0.9/N$	-21
Hanning	-31	$8/N$	$3.1/N$	-44
Hamming	-41	$8/N$	$3.3/N$	-53
Blackman	-57	$12/N$	$5.5/N$	-74

■ Qq propriétés des fenêtrés

- ① Si N croît, L décroît → bande de transition ΔF faible
- ② A est indépendant de la longueur de la fenêtré
- ③ On ne peut pas réduire simultanément A et L

■ Réglages

- ① δ_2 désirée → choix type de fenêtré
- ② ΔF désirée → choix de N

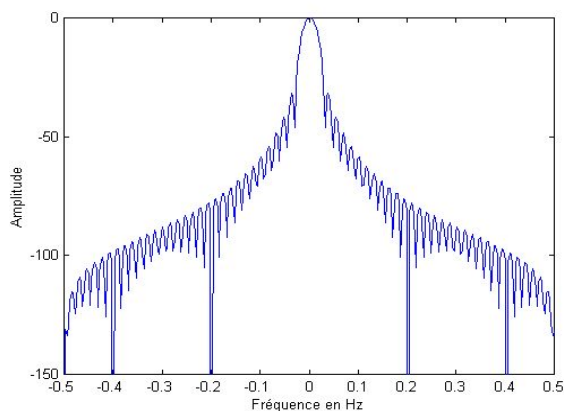
Synthèse de filtre RIF : méthode de fenêtre

Choix de la fenêtre

- Types de fenêtre utilisée de longueur N ou d'ordre $N-1$

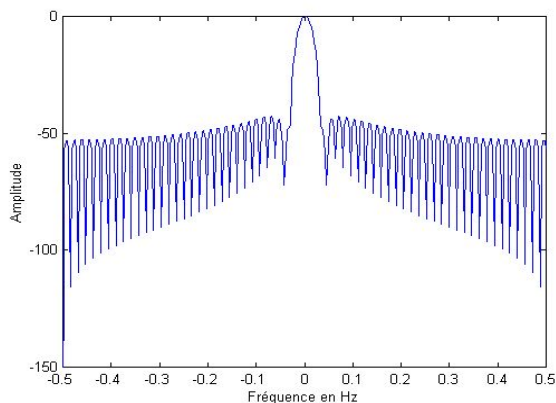
Hanning

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



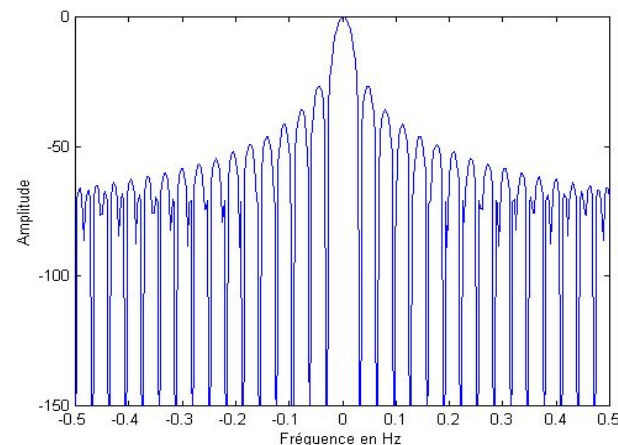
Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Bartlett

$$w(n) = 1 - \frac{2\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}$$



Synthèse de filtre RIF

□ Echantillonnage de la réponse fréquentielle

Méthode de fenêtre basée sur la TFTD inverse → nécessité d'avoir l'expression analytique de $H(f)$

■ Principe de l'échantillonnage fréquentiel

Connaissant la réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre, on peut l'échantillonner avec un pas $1/N$ et en déduire $h(n)$ par TFD inverse

➤ Echantillonnage fréquentiel

$$H(k) = H(f) \Big|_{f=\frac{k}{N}}$$

$$k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

➤ TFD inverse

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} H(k) e^{j2\pi \frac{k}{N}n}$$

■ Structure de réalisation

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \cdot \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} H(k) \frac{1}{1-z^{-1} \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N}}}$$

□ □ Mise en série de deux systèmes □ □

Mise en parallèle de N systèmes

Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

□ Synthèse des filtres RII

■ Principe

- Calculer un filtre analogique
- Transformer le filtre analogique en un filtre numérique équivalent

■ Contraintes

- Transformer une fonction rationnelle $H(s)$ en une fonction rationnelle $H(z)$
- Conserver la stabilité du filtre analogique
 - Transformer le demi-plan complexe gauche en l'intérieur du cercle unité
 - Transformer l'axes des imaginaires en cercle unité

■ Méthodes

- Conservation de la réponse impulsionnelle du filtre analogique ("numérisation")
- Transformation bilinéaire

Filtre RII : synthèse

❑ Méthode de l'invariance impulsionnelle

■ Principe

On échantillonne la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique connu

$$H_a(s) \xrightarrow{TL^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{\text{Echantillonnage}} h_d(nT_e) = h_a(t)|_{t=nT_e}$$

■ Réponse en fréquence

L'échantillonnage de $h_a(t)$ entraîne une périodisation du spectre $H_d(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(f + \frac{k}{T_e}\right)$

Condition de Shannon à respecter par conséquent

■ Pôles

Correspondance entre le plan des s et le plan des z : $z = e^{sT_e}$

$$\frac{1}{s - \lambda_i} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{\lambda_i T_e} z^{-1}}$$

Si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ alors, le pôle associé dans le filtre numérique est à l'intérieur du cercle unité

■ Précautions

La réponse du filtre numérique sera proche de celle du filtre analogique dans la bande $[-F_e/2, F_e/2]$ si le filtre analogique a une réponse fréquentielle nulle en dehors de cette bande. Cette méthode est utile seulement dans le cas de filtres analogiques à bande limitée.

Filtre RII : synthèse

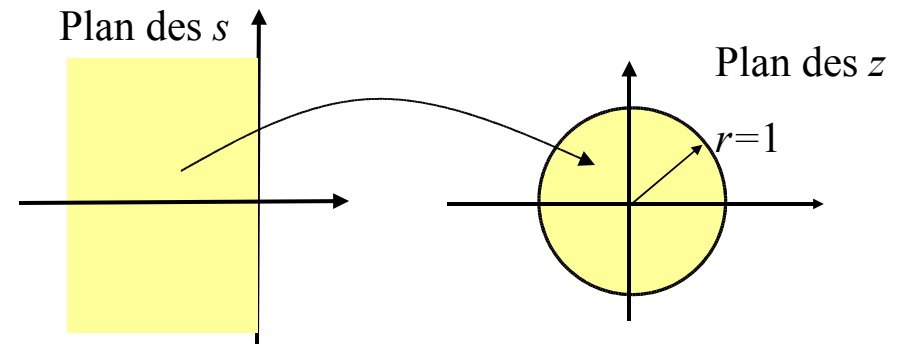
Transformation bilinéaire

$$H(s) \rightarrow H(z) \quad \text{avec} \quad s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (1) \quad T_e : \text{fréquence d'échantillonnage}$$

■ Pôles

$$z = \frac{2/T_e + s}{2/T_e - s}$$

Si s a une partie réelle négative, z est de module inférieur à 1 $\Rightarrow$ conservation de la stabilité



■ Déformation des fréquences

La transformation entraîne une relation non linéaire entre les fréquences f_a du domaine analogique et les fréquences f_d du domaine numérique

$$\pi f_a = \frac{1}{T_e} \tan(\pi f_d T_e) \quad (2)$$

$$f_d = \frac{1}{\pi T_e} \tan^{-1}(\pi f_a T_e) \quad (3)$$

■ Méthodologie

- Définir le gabarit du filtre numérique
- Convertir ce gabarit en un gabarit correspondant au filtre analogique par la relation (2)
- Faire la synthèse du filtre analogique (Butterworth, Tchebychev ...) $\rightarrow H_a(s)$
- Transformer $H_a(s)$ en $H_d(z)$ en utilisant (1)

Transformation bilinéaire

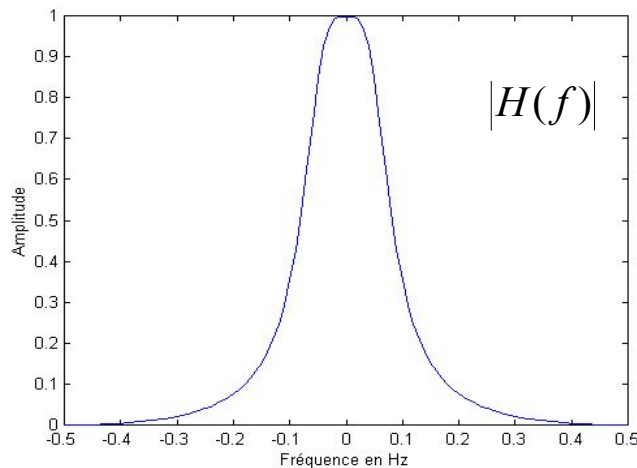
Exemple

On utilise des fonctions modèles classiques de types filtres de Butterworth, Tchebychev....

Soit un filtre de Butterworth analogique $H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$

On applique la transformation bilinéaire $s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

Après calcul et en prenant $\omega_c = 2$ $T_e = 2$ $H(z) = \frac{0.0302(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.4514z + 0.5724}$



Fréquence de coupure du filtre analogique

$$F_c = 0.318 \text{ Hz}$$

Fréquence de coupure du filtre numérique

$$F_c = 0.176 \text{ Hz}$$

Comparaison RIF - RII

RIF

- Toujours stable.
- Phase linéaire.
- Facile à concevoir.
- La durée des transitoires = longueur du filtre.

RII

- Peuvent être instables.
- Phase non linéaire.
- Nécessitent moins d'opérations et de places mémoires.
- Plus efficaces que RIF

Bibliographie

1. S. Mitra, "Digital Signal Processing : A computer based approach", McGraw Hill Edt, 1998.
2. Y. Thomas, "Signaux et Systèmes Linéaires", Edition Masson, 1994.
3. M. Bellanger, " Traitement numérique du signal", Edition Dunod, 1993.
4. G. Blanchet, M. Charbit "Traitement numérique du signal", Edition Hermès, 1998
5. A. Quinquis "Le traitement du signal sous Matlab", Edition Hermès, 2000

Filtres Numériques

Objectif

Modification contrôlée d'une séquence d'entrée en une séquence de sortie.

Système numérique

Un filtre numérique est un système. On a donc

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k] \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

Condition de stabilité et de causalité

Tout les pôles d'un filtre linéaire et stable sont situés à l'intérieur du cercle unité

Définition de la relation d'entrée-sortie par une équation au différences

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

Classification par la relation entrée/sortie

filtre non récursif ou filtre à réponse impulsionnelle finie

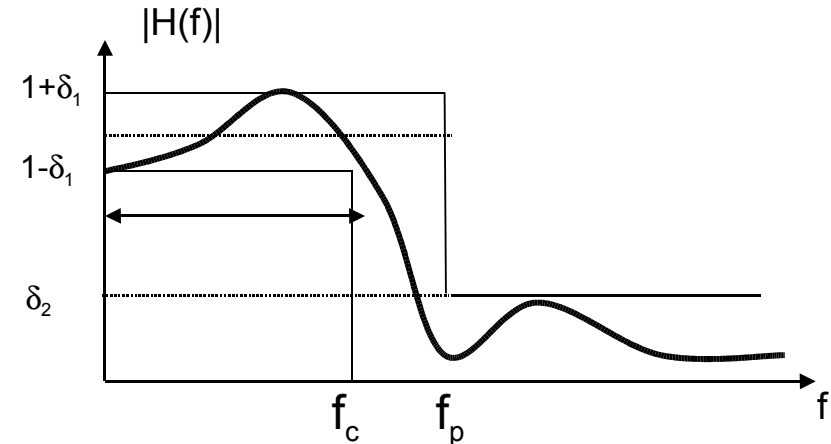
filtre récursif ou filtre à réponse impulsionnelle infinie

Calcul des coefficients d'un filtre FIR

Méthode de la fenêtre

① définition du gabarit

- ondulation dans la bande passante δ_1
- ondulation dans la bande coupée δ_2
- largeur de la zone de transition ΔF



② calcul de la réponse impulsionnelle idéale

- à partir du gabarit idéal, la TF inverse donne la réponse impulsionnelle idéale.

③ Décalage et Pondération de la réponse impulsionnelle idéale pour obtenir un filtre causal RIF

- pour limiter la longueur de la réponse impulsionnelle
- pour atténuer les ondulations en bande coupée

Filtre RIF

Filtre à réponse impulsionnelle finie

Caractéristiques

La sortie est une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées.

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x[n-i]$$

La réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un filtre d'ordre **N-1** est

$$h[n] = \begin{cases} a_n & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \begin{array}{l} h[n] \text{ est nulle à partir d'un certain rang d'où sa} \\ \text{dénomination} \end{array}$$

La fonction de transfert en z du filtre est

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$$

Réponse fréquentielle du filtre

$$H(f) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j2\pi f k}$$

Filtre RII

Filtre à réponse impulsionnelle infinie

Filtre faisant intervenir des éléments antérieurs de la séquence de sortie

$$y[n] = \sum_{k=0}^L b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^K a_k y[n-k]$$

L'hypothèse supposé dans cet équation est que le filtre est causal, c'est à dire que $y[n]=0$ pour $n < 0$.

$h[n]$ peut ne pas s'annuler, d'où l'appellation filtre à réponse impulsionnelle infinie.

Fonction de Transfert en Z

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^L b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^K a_k z^{-k}}$$

Réponse fréquentielle

Sous réserve de convergence

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{2\pi j f}}$$

module $|H(f)|^2 = \left[H(z) H(z^{-1}) \right]_{z=e^{2\pi j f}}$

phase $\phi(f) = -\frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right]_{z=e^{2\pi j f}}$

Exemples de Filtres RII

Relation d'entrée-sortie

$$y[n] - by[n-1] = x[n]$$

Fonction de Transfert en z

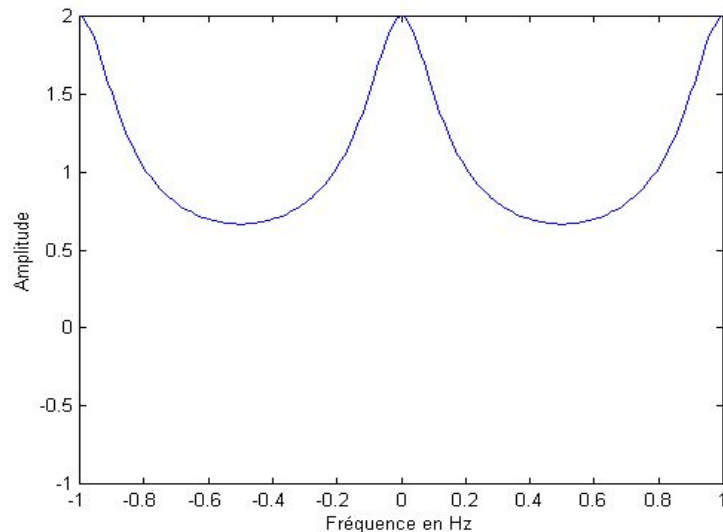
$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} \quad \text{si} \quad |b| < 1$$

Réponse fréquentielle

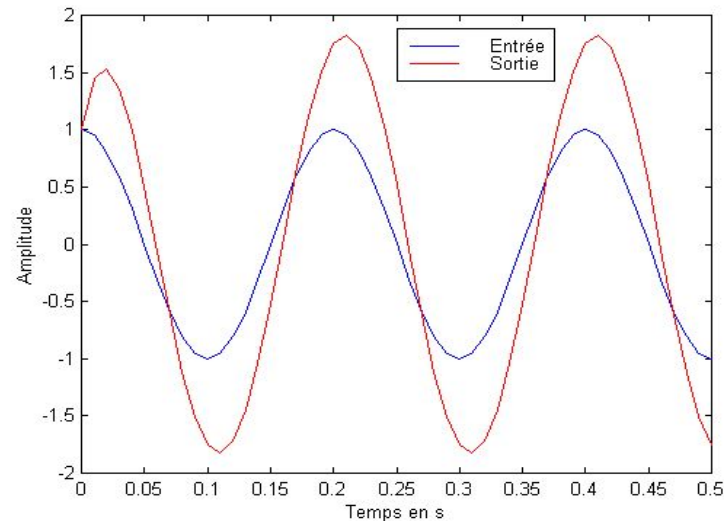
$$H(f) = \frac{1}{1 - be^{-2\pi jf}}$$

$b=0.5$

Réponse en fréquence



Réponse à un signal sinusoïdal $f_0=5$ Hz



Calcul d'un filtre IIR

Principe

- ① Calculer un filtre analogique et en déduire un filtre numérique équivalent
- ② Utiliser des méthodes algorithmiques permettant de calculer les coefficients de n'importe quel gabarit de filtre

On s'intéressera au cas 1

Contraintes

Transformer l'axe des imaginaires en cercle unité

Permet d'introduire la périodicité des filtres numériques

Transformer une fonction rationnelle en p en une fonction rationnelle en z

Conservation de la stabilité

Méthodes

Conservation de la réponse impulsionnelle du filtre analogique ("numérisation")

Transformation bilinéaire

Filtre IIR Invariance Impulsionnelle

Principe

On échantillonne la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique connu $h[n] = h_a(nT_s)$

Réponse en fréquence

L'échantillonnage de $h_a(t)$ entraîne une périodisation du spectre

$$H(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(f + \frac{k}{T_s}\right)$$

Pôles

$$\frac{1}{p - p_k} \rightarrow \frac{1}{1 - e^{p_k T_s} z^{-1}}$$

Si $\text{Re}(p_k) < 0$ alors, le pôle associé dans le filtre numérique est à l'intérieur du cercle unité

Précautions

La réponse du filtre numérique sera proche de celle du filtre analogique dans la bande $[-F_s/2, F_s/2]$ si le filtre analogique a une réponse nulle en dehors de cette bande. Cette méthode est utile seulement dans le cas de filtres analogiques à bande limité.

Transformation bilinéaire

Principe

On cherche une correspondance entre la réponse du filtre analogique et celle du filtre numérique

Transformation

$$H(p) \rightarrow H(z) \quad \text{par} \quad p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad T_e : \text{fréquence d'échantillonnage}$$

Une fraction rationnelle en p est transformée en une fraction rationnelle en z

Pôles

$$z = \frac{\frac{2}{T_e} + p}{\frac{2}{T_e} - p}$$

Si p a une partie réelle négative, z est de module inférieur à 1 $\Rightarrow$
Conservation de la stabilité

Déformation

La transformation entraîne une relation non linéaire entre les fréquences du domaine analogique et les fréquences du domaine numérique. Il faut tenir compte de cette relation pour le calcul du filtre numérique.

$$\pi f_A = \frac{1}{T_e} \tan(\pi f_N T_e)$$

$$f_N = \frac{1}{\pi T_e} \tan^{-1}(\pi f_A T_e)$$

Bibliographie

1. S. Mitra, "Digital Signal Processing : A computer based approach", McGraw Hill Edt, 1998.
2. Y. Thomas, "Signaux et Systèmes Linéaires", Edition Masson, 1994.
3. M. Bellanger, " Traitement numérique du signal", Edition Dunod, 1993.

Introduction

❏ Filtrage numérique

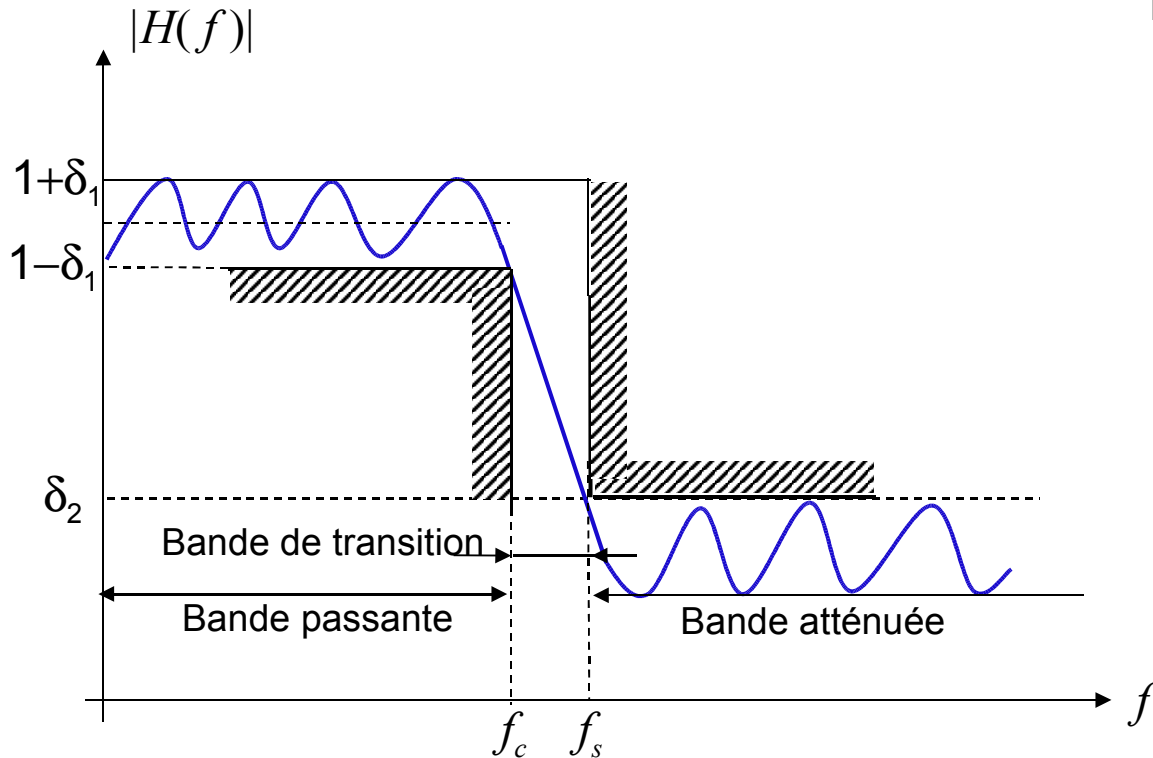
- Modification contrôlée de la distribution des composantes fréquentielles d'un signal
- Modification contrôlée d'une séquence d'entrée discrète en une séquence de sortie discrète
- Un filtre numérique est un système



- Objectif du cours : exposer les méthodes de conception de filtre linéaire invariant ayant la réponse fréquentielle souhaitée (gabarit du filtre) et de réalisation simple

Caractéristiques des filtres réels

□ Gabarit du filtre



Filtre caractérisé par :

- la bande passante BP
- la bande atténuée (ou coupée)
- la largeur de la zone de transition
- l'amplitude des oscillations en bande passante δ_1
- l'amplitude des ondulations en bande atténuée δ_2

Synthèse de filtre RIF

□ Méthode de la fenêtre : méthodologie

- A partir du gabarit réel du filtre, déterminer le nombre N des coefficients du filtre
- A partir du **gabarit idéal** du filtre, déterminer les coefficients du filtre en limitant le calcul à N valeurs **réparties symétriquement** autour de $\alpha=N-1/2$ (**solution causale**)

➤ Calcul de la TFTD inverse du filtre idéal de réponse impulsionnelle

$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{j2\pi f n} df$$

➤ Centrage de la réponse impulsionnelle sur $\alpha=N-1/2$ $\tilde{h}(n) = h\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$

➤ Limitation de la réponse impulsionnelle à N échantillons

Pondération de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ par une suite discrète $w(n)$ appelée **fenêtre de pondération**

$$\tilde{h}_N(n) = \tilde{h}(n) \cdot w(n)$$

■ Exemple de fenêtre : fenêtre rectangulaire $w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Synthèse de filtre RIF : méthode de fenêtre

□ Relation entre longueur de la R.I. et le gabarit

- N : longueur du filtre est un paramètre important

N détermine la place mémoire nécessaire à l'implémentation du filtre

- Relation empirique

$$N \approx \frac{2}{3\Delta F} \ln\left(\frac{1}{10\delta_1\delta_2}\right)$$

N dépend de la largeur de la bande de transition et de l'amplitude des ondulations

N ne dépend pas de la bande passante